Fen-Edebiyat Fakültesi	FİNAL KAĞIDI	
Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Analiz IV	
İmza:	Sınav Tarihi: 4 Haziran 2018	

6 sorudan yanlızca beşini çözün. Süre 100dk.

1. $z^2 = xy + 4$ yüzeyi üzerinde yer alan ve orijine en yakın olan noktaları bulun.

1. yöntem: $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$g(x,y,z) = xy+4-z^2 = 0 \Rightarrow z^2 = xy+4.$

$F(x,y) = x^2+y^2+(xy+4)$

$F_x = 2x+y = 0$ $\Rightarrow$ $x=y=0$ $\Downarrow$ $z^2=4$, $z=\mp 2.$

$F_y = 2y+x = 0$

$F_{xx} = 2$, $F_{xy} = 1$, $F_{yy} = 2$

$\Delta = F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 = 3 > 0$

$F_{xx} > 0$

$F(0,0)$ min.

$(0,0,\mp 2)$ noktalarında min. var.

2. yöntem $\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow$

$2x = \lambda y$
$2y = \lambda x$
$2z = -2\lambda z$
$z^2 = xy+4$

$\rightarrow 2x = \frac{\lambda^2}{2}x$, $2z = -2\lambda z$, $z^2 = \frac{\lambda x^2}{2}+4$

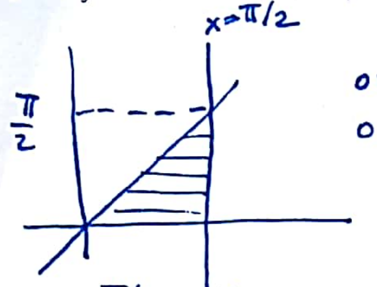
$\Rightarrow x=y=0 \Rightarrow z = \mp 2$

$z=0 \Rightarrow x=2,\ y=-2$
$x=-2,\ y=2.$

Dört çözüm: $(0,0,2), (0,0,-2), (2,-2,0), (-2,2,0)$

Orijine en yakın noktalar: $(0,0,2), (0,0,-2).$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx\,dy$ sıralı integralini hesaplayın.



$0 \le x \le \pi/2$

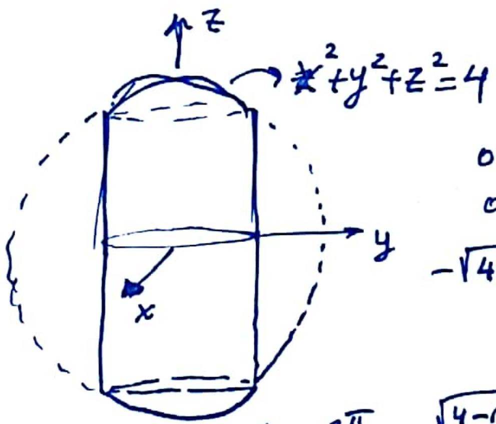
$0 \le y \le x$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{x} \frac{\sin x}{x}\,dy\,dx = \int_0^{\pi/2} x\,\frac{\sin x}{x}\,dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

$$\boxed{1}$$

---

3. $x^2 + y^2 = 1$ silindiri ve $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresi ile sınırlandırılmış bölgenin hacimini hesaplayın.



$0 \le r \le 1$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$-\sqrt{4-r^2} \le z \le \sqrt{4-r^2}$

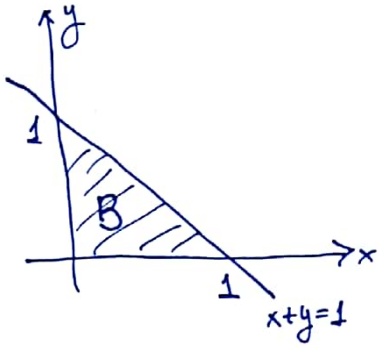
$$\text{Hacim} = \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} dz\,r\,d\theta\,dr = \int_{r=0}^{1} r\;2\pi\;2\cdot\sqrt{4-r^2}\,dr$$

$u = 4 - r^2$

$$= 2\pi \int_4^3 -du\,\sqrt{u} = 2\pi\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_3^4 = \frac{4\pi}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)$$

$$\boxed{\frac{4\pi}{3}(8-3\sqrt{3})}$$

4. B bölgesi, düzlemde $x+y=1$ doğrusu ve koordinat eksenleri ile sınırlı bölge olsun. $\iint_B e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dA$ integralini $u=y-x$ ve $v=y+x$ değişken dönüşümünü kullanarak bulun.

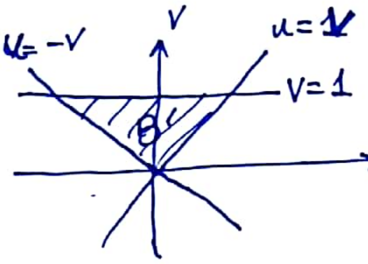


$$u=y-x, \quad v=y+x \Rightarrow x=\frac{v-u}{2}, \quad y=\frac{u+v}{2} \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} = J$$

$x=0 \Rightarrow u=v$

$y=0 \Rightarrow u=-v$

$x+y=1 \Rightarrow v=1$



$0 \leq v \leq 1$

$-v \leq u \leq u$

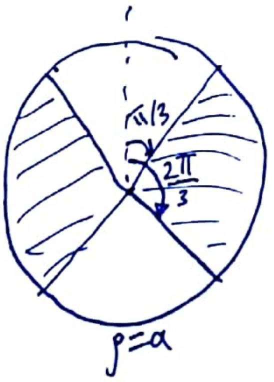
$$\iint_B e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dA = \iint_{B'} e^{u/v}\, |J|\, dA' = \int_{v=0}^{1} \int_{u=-v}^{v} e^{u/v} \frac{1}{2}\, du\, dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_{v=0}^{1} v e^{u/v} \Big|_{u=-v}^{v} dv = \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right) \int_{v=0}^{1} v\, dv = \frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)}$$

---

5. $\rho = a$ küresi, $\phi = \pi/3$ konisi ve $\phi = 2\pi/3$ konisi tarafından sınırlandırılan bölgenin hacimini hesaplayın.



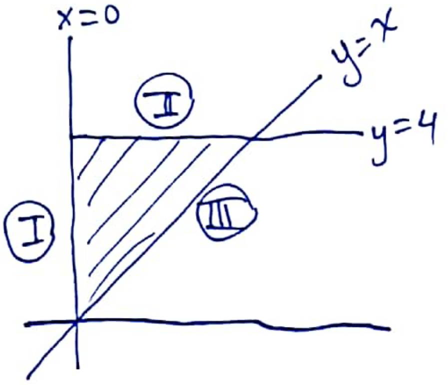
$$\text{Hacim} = \int_{\rho=0}^{a} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=\frac{\pi}{3}}^{2\pi/3} \rho^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta\, d\rho$$

$$= \int_{\rho=0}^{a} \rho^2 d\rho \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\phi=\pi/3}^{2\pi/3} \sin\phi$$

$$= \frac{a^3}{3} \cdot 2\pi \left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{1/2} - \underbrace{\cos\frac{2\pi}{3}}_{-1/2}\right) = \frac{a^3\, 2\pi}{3}$$

$$\boxed{\frac{a^3\, 2\pi}{3}}$$

6. B bölgesi, düzlemde birinci bölgede yer alan ve $x=0$, $y=4$, $y=x$ doğruları ile sınırlandırılmış kapalı üçgen bölge olsun. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ fonksiyonunun B bölgesi üzerinde aldığı mutlak maksimum ve mutlak minimum değerleri bulun.



$f_x = 2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x$

$f_y = -x + 2y = 0 \qquad -x + 4x = 0 \Rightarrow x = y = 0.$

Kritik nokta: $\boxed{(0,0)}$

I $x=0$:

$g(y) = f(0,y) = y^2 + 1$ $\quad 4 \geq y \geq 0$ için artan fonksiyon.

min: $y=0$ $\Rightarrow$ $(0,0)$

max: $y=4$ $\quad (0,4)$

II $y=4$:

$g(x) = f(x,4) = x^2 - 4x + 17$

$g'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$ $(2,4)$

$(0,4)$, $(4,4)$

III $x=y$:

$g(x) = f(x,x) = x^2 - x^2 + x^2 + 1 \qquad 0 \leq x \leq 4$

artan fonksiyon: $\boxed{(0,0),\ (4,4)}$

$f(0,0) = 1$

$f(0,4) = 17$

$f(2,4) = 13$

$f(4,4) = 17$

Maks. değer $= 17$

Min. değer $= 1$.